

# ZBIRKA DETALJNO REŠENIH ZADATAKA ZA II RAZRED VLADIMIR BEČEJAC

Ova zbirka ima cilj da se brže i lakše shvate zadaci iz oblasti predviđene planom i programom za II razred. Skoro svi zadaci iz zbirke su detaljno rešeni. Zbirka će biti u potpunosti gotova na kraju školske godine kada budu pređene sve oblasti. Zelenom bojom su šrafirani zadaci koje mogu rešiti svi učenici (oni su uglavnom za ocene 2 i 3), žutom bojom su šrafirani zadaci za ocene 4 i 5, sa crvenom bojom su označeni za 4 i 5, ali za njihov rad je potrebno malo više razmišljanja i truda. Tamno zelenom bojom su označena rešenja zadataka. Plavom bojom su označene neke pomoćne stvari koji bi pomogle u rešavanju zadatka. Ljubičastom bojom su označeni predlozi za kontrolne zadatke. Zadaci su uglavnom uzimani iz «Zbirke rešenih zadataka iz matematike 2» mr Venea T. Bogoslavova; i «Zbirke rešenih zadataka za drugi razred srednjih škola» (treće izdanje) dr Dušana Georgijevića i dr Milutina Obradovića.

## OBLAST I: STEPENI I KORENI

1. Izračunaj:  $\frac{\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3 \cdot 2^{-3}\right)^{-1}}{2^{-2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0} \cdot \frac{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$

Rešenje:  $\frac{\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} + 3 \cdot 2^{-3}\right)^{-1}}{2^{-2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0} \cdot \frac{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + 3 \cdot \frac{1}{8}\right)^{-1}}{\frac{1}{2^2} + 5 \cdot 1} = \frac{\left(\frac{1}{\frac{4}{9}} + \frac{3}{8}\right)^{-1}}{\frac{1}{4} + 5} = \frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{8}\right)^{-1}}{3 - \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{21}{8}\right)^{-1}}{\frac{11}{4}} = \frac{\frac{8}{21}}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{21} \cdot \frac{4}{11} = \frac{32}{231}$

2. Uprosti izraz:  $x^4 y^{-3} \cdot x^{-3} y^{-6} \cdot (xy)^{-3} \cdot (x^3 y^2)^{-4} \cdot (xy^{-2})^3$

Rešenje:  $x^4 y^{-3} \cdot x^{-3} y^{-6} \cdot (xy)^{-3} \cdot (x^3 y^2)^{-4} \cdot (xy^{-2})^3 = x^4 y^{-3} x^{-3} y^{-6} x^{-3} y^{-3} x^{-12} y^{-8} x^3 y^{-6} = x^{4-3-3-12+3} y^{-3-6-3-8-6} = x^{-11} y^{-26}$

3. Uprosti izraz:  $\left(\frac{x^5 y^{-2}}{z^{-3}}\right)^5 \left(\frac{z^{-6} y^6}{x^{12}}\right)^4$ .

Rešenje:  $\left(\frac{x^5 y^{-2}}{z^{-3}}\right)^5 \left(\frac{z^{-6} y^6}{x^{12}}\right)^4 = \frac{x^{25} y^{-10}}{z^{-15}} \cdot \frac{z^{-24} y^{24}}{x^{48}} = \frac{y^{-10} z^{-9} y^{24}}{x^{23}} = \frac{z^{-9} y^{14}}{x^{23}}$

4. Uprosti izraz:  $\left(\frac{3a^{-3}}{5b^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-1}}{5b^{-3}}\right)^{-2} : \frac{30}{a^{-6}b}$ .

Rešenje :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a^{-3}}{5b^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9a^{-1}}{5b^{-3}}\right)^{-2} : \frac{30}{a^{-6}b} &= \left(\frac{3 \cdot \frac{1}{a^3}}{5 \cdot \frac{1}{b^2}}\right)^{-3} : \left(\frac{9 \cdot \frac{1}{a}}{5 \cdot \frac{1}{b^3}}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{30} b = \left(\frac{\frac{3}{a^3}}{\frac{5}{b^2}}\right)^{-3} : \left(\frac{\frac{9}{a}}{\frac{5}{b^3}}\right)^{-2} \cdot \frac{b}{30} = \\ &= \left(\frac{(3b^2)^{-3}}{(5a^3)^{-2}}\right) \cdot \frac{b}{30a^6} = \left(\frac{1}{\left(\frac{3b^2}{5a^3}\right)^3} : \frac{1}{\left(\frac{9b^3}{5a}\right)^2}\right) \cdot \frac{b}{30a^6} = \frac{1}{27b^6} \cdot \frac{81b^6}{25a^2} \cdot \frac{b}{30a^6} = \\ &= \frac{125a^9 \cdot 81b^6 \cdot b}{27b^6 \cdot 25a^2 \cdot 30a^6} = ab \end{aligned}$$

5. Uprosti izraz :  $\frac{1}{2(1+a^x)} - \frac{1}{2(1-a^{-x})} - \frac{1}{a^{-2x}-1}$ .

Rešenje :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1+a^x)} - \frac{1}{2(1-a^{-x})} - \frac{1}{a^{-2x}-1} &= \frac{1}{2(a^x+1)} - \frac{1}{2\left(\frac{a^x-1}{a^x}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{a^{2x}}-1} = \frac{1}{2(a^x+1)} - \frac{a^x}{2(a^x-1)} - \frac{a^{2x}}{1-a^{2x}} = \\ &= \frac{a^x-1-a^x(a^x+1)}{2(a^x+1)(a^x-1)} + \frac{a^{2x}}{a^{2x}-1} = \frac{a^x-1-a^{2x}-a^x}{2(a^x+1)(a^x-1)} + \frac{a^{2x}}{a^{2x}-1} = \frac{-1-a^{2x}+2a^{2x}}{2(a^{2x}-1)} = \frac{a^{2x}-1}{2(a^{2x}-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. Uprosti izraz :  $\left(\frac{y^{-1}+x^{-1}}{xy^{-1}+yx^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{y^{-1}-x^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$ .

Rešenje :

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^{-1}+x^{-1}}{xy^{-1}+yx^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{y^{-1}-x^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} &= \left(\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\right)^{-1} + \left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\right)^{-1} - \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{xy}} = \\ &= \left(\frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{x^2+y^2}{xy}}\right)^{-1} + \left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} - \frac{a-b}{\frac{1}{ab}} = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)^{-1} + \left(\frac{x+y}{2xy}\right)^{-1} - (x-y) = \frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{2xy}{x+y} - x+y = \\ &= \frac{(x+y)^2}{x+y} - x+y = x+y-x+y = 2y \end{aligned}$$

7. Izračunaj:  $(2\sqrt{5} - 19)(2\sqrt{5} + 19)$ .

Rešenje:  $(2\sqrt{5} - \sqrt{19})(2\sqrt{5} + \sqrt{19}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{19})^2 = 20 - 19 = 1$

8. Dokazati da je A i B jednako:  $A = \sqrt{1 - \frac{2a-1}{a^2}}$      $B = \sqrt{9 + \frac{(a-1-3a)(a-1+3a)}{a^2}}$ .

$$A = \sqrt{1 - \frac{2a-1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2}} = \frac{a-1}{a}$$

$$B = \sqrt{9 + \frac{(a-1-3a)(a-1+3a)}{a^2}} = \sqrt{\frac{9a^2 + (-2a-1)(4a-1)}{a^2}} = \sqrt{\frac{9a^2 - 8a^2 - 4a + 2a + 1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2}} = \frac{a-1}{a}$$

9. Racionališi:  $\frac{1}{\sqrt{7}}$

Rešenje:  $\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

10. Racionališi:  $\frac{10}{\sqrt[4]{25}}$

Rešenje:  $\frac{10}{\sqrt[4]{25}} = \frac{10}{\sqrt[4]{5^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

11. Racionališi:  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

Rešenje:  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$

12. Racionališi:  $\frac{a+1 - \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}$

Rešenje:

$$\frac{a+1 - \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} = \frac{(a+1 - \sqrt{a+1}) \cdot \sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1})^2} = \frac{a\sqrt{a+1} + \sqrt{a+1} - a - 1}{a+1} = \frac{\sqrt{a+1} \cdot (a+1) - (a+1)}{a+1} = \frac{(a+1)(\sqrt{a+1} - 1)}{a+1} = \sqrt{a+1} - 1$$

13. Racionališi:  $\frac{a}{\sqrt{a+1} + 1}$

Rešenje:  $\frac{a}{\sqrt{a+1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{a+1} - 1}{\sqrt{a+1} - 1} = \frac{a\sqrt{a+1} - a}{a+1-1} = \frac{a(\sqrt{a+1} - 1)}{a} = \sqrt{a+1} - 1$

14. Racionališi  $\frac{4}{\sqrt[3]{2} - 1}$

Rešenje:  $\frac{4}{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{4(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{4(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{2 - 1} = 4(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$

15. Racionališi:  $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$ .

Rešenje:  $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^5}} = \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{x^5}}{x}$

16. Racionališi:  $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$ .

Rešenje:  $\frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5}) \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} =$   
 $= \frac{((\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})\sqrt{6})}{2 \cdot 6} = \frac{((\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5})\sqrt{6})}{12}$

17. Skrati razlomak:  $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{20}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$ .

Rešenje:

$\frac{\sqrt{30}-\sqrt{20}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{12}+\sqrt{8}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}} = \frac{(\sqrt{30}-\sqrt{20})(\sqrt{12}+\sqrt{8})}{12-8} = \frac{\sqrt{360}-\sqrt{240}+\sqrt{240}-\sqrt{160}}{4} = \frac{6\sqrt{10}-4\sqrt{10}}{4} =$   
 $= \frac{\sqrt{10}}{2}$

18. Izvrši naznačene operacije:  $\sqrt[4]{1+2x+x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^5+x^4}{x^2-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$

Rešenje:

$\sqrt[4]{1+2x+x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^5+x^4}{x^2-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}} = \sqrt[4]{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x^5+x^4}{x^2-1}} \cdot \frac{x^2-1}{x^4} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{\frac{x^5+x^4}{x^4}} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1} =$   
 $= x+1$

19. Uprosti izraz:  $\sqrt[4]{\frac{a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3}{b^2(a+x)}} \cdot \sqrt{\frac{a-2x}{b}}$

Rešenje:

$\sqrt[4]{\frac{a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3}{b^2(a+x)}} \cdot \sqrt{\frac{a-2x}{b}} = \sqrt[4]{\frac{(a-2x)^3}{b^2(a+x)}} \cdot \frac{(a-2x)}{b} = \sqrt[4]{\frac{(a-2x)^3}{b^2(a+x)}} \cdot \frac{b^2}{(a-2x)^2} = \sqrt[4]{\frac{a-2x}{a+x}}$

20. Korenovati sledeći koren:  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}}$

Rešenje:  $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[20]{32} = \sqrt[20]{2^5} = \sqrt[4]{2}$

21. Izračunaj:  $\left(16^{\frac{1}{8}} + \left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(2^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ .

Rešenje:

$\left(16^{\frac{1}{8}} + \left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(2^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[8]{2^4} + 27^{\frac{1}{3}}\right) \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3^3})(\sqrt{2}-3) = (\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3) =$   
 $= 2-9 = -7$

**22.** Izračunaj:  $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} + \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} + \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} &= \frac{a-b}{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} + \frac{a-b}{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \frac{a-b}{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} + \frac{a-b}{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} + \frac{(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b})}{a-b} = 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

**23.** Obavi naznačene operacije:  $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$ .

Rešenje:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} &= \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} \cdot \frac{\sqrt{2a}-2}{\sqrt{2a}-2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \cdot \frac{a+\sqrt{2a}}{a+\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \\ &= \left(\frac{(a+2)\sqrt{2a}}{2a} - \frac{a\sqrt{2a}-2a}{2a-4} + \frac{2a+2\sqrt{2a}}{a^2-2a}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \left(\frac{a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}}{2a} - \frac{a\sqrt{2a}-2a}{2(a-2)} + \frac{2a+2\sqrt{2a}}{a(a-2)}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \\ &= \frac{(a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a})(a-2) - (a\sqrt{2a}-2a)a + (2a+2\sqrt{2a}) \cdot 2}{2a(a-2)} = \frac{a^2\sqrt{2a} + 2a\sqrt{2a} - 2a\sqrt{2a} - 4\sqrt{2a} - a^2\sqrt{2a} + 2a^2 + 4a}{2a(a-2)} = \\ &= \frac{2a^2 + 4a}{2a(a-2)} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{2a(a+2)}{2a(a-2)} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2} \end{aligned}$$

**24.** Izračunati vrednost izraza  $x^2 - 2x - 1$  za  $x = 1 + \sqrt{2}$ .

Rešenje:  $(1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2}) - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 0$

**25.** Izračunaj:  $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}$ .

Imati u vidu da je Legranžeova formula:  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$ .

Rešenje: Primenom gore navedene formule dobijamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} &= \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-32}}{2}} - \sqrt{\frac{6-\sqrt{36-32}}{2}} + \sqrt{\frac{8+\sqrt{64-60}}{2}} - \sqrt{\frac{8-\sqrt{64-60}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{6+2}{2}} - \sqrt{\frac{6-2}{2}} + \sqrt{\frac{8+2}{2}} - \sqrt{\frac{8-2}{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

**26.** Izračunaj:  $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ .

Rešenje: Kako je  $40\sqrt{2} < 57$  možemo napisati

$$\begin{aligned} \sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} &= \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = \sqrt{(5 - 4\sqrt{2})^2} - \sqrt{(5 + 4\sqrt{2})^2} = \\ &= 4\sqrt{2} - 5 - 5 - 4\sqrt{2} = -10 \end{aligned}$$

27. Uprosti izraz:  $\frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}$

Rešenje: 
$$\frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}} = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2} + 4}} = \frac{a^2 + 4}{\sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2} \cdot a^2 + 4a^2}} = \frac{a^2 + 4}{\sqrt{\frac{a^4 - 8a^2 + 16 + 16a^2}{4}}} =$$

$$= \frac{a^2 + 4}{\frac{\sqrt{(a^2 + 4)^2}}{2}} = \frac{a^2 + 4}{\frac{a^2 + 4}{2}} = 2$$

28. Uprosti izraz:  $\frac{\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} + 2}{\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} - 2}$

Rešenje: 
$$\frac{\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} + 2}{\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} - 2} = \frac{\sqrt{x - 4 - 4\sqrt{x - 4} + 4} + 2}{\sqrt{x + 4 + 4\sqrt{x - 4} - 4} - 2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x - 4} - 2)^2} + 2}{\sqrt{(\sqrt{x - 4} + 2)^2} - 2} = \frac{|\sqrt{x - 4} - 2| + 2}{|\sqrt{x - 4} + 2| - 2} = \frac{|\sqrt{x - 4} - 2| + 2}{\sqrt{x - 4}}$$

Dati izraz je jednak 
$$\frac{|\sqrt{x - 4} - 2| + 2}{\sqrt{x - 4}} = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{x - 4}}{\sqrt{x - 4}} & 4 < x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

29. Izračunati vrednost izraza da datu vrednost x:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(a+x)(x+b)}}}{\sqrt{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}}$$
 za  $x = \sqrt{ab}$

Zamenom x u izraz dobijamo:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(a+x)(x+b)}}}{\sqrt{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)} + \sqrt{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{ab}+b)}}}{\sqrt{\sqrt{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{ab}+b)} - \sqrt{(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}}{\sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}} = \frac{\sqrt{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}}{\sqrt{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$

30. Uprosti izraz:  $\frac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} + \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}}{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} - \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}}$

Rešenje: 
$$\frac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} + \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}}{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}} - \sqrt{\frac{a-2}{a+2}}} = \frac{\sqrt{a+2} \cdot \sqrt{a+2} + \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a+2}} = \frac{a+2 + a-2}{\sqrt{a+2} \cdot \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a+2}} = \frac{2a}{a+2 - a+2} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$$

**31.** Obavi sledeće operacije:  $(\sqrt{x^3\sqrt{x^2}}) \cdot \sqrt[3]{x^2} : (\sqrt{x^{-1}})^3$

Rešenje:  $(\sqrt{x^3\sqrt{x^2}}) \cdot \sqrt[3]{x^2} : (\sqrt{x^{-1}})^3 = \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x^{-3}} = \sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x^4} : \sqrt[6]{x^{-9}} = \sqrt[6]{x}$

**32.** Izraz ispred korena uneti pod koren i uprostiti:  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{x^4 - 2x^2 y^2 + y^4}}$

Rešenje:  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{x^4 - 2x^2 y^2 + y^4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right)^3 \cdot \frac{x^2 y^2}{(x^2 - y^2)^2}} = \sqrt[3]{\frac{(x^2 - y^2)^3}{x^3 y^3} \cdot \frac{x^2 y^2}{(x^2 - y^2)^2}} = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y^2}{xy}}$

Primer kontrolnog zadatka iz oblasti STEPENI I KORENI:

1. Izračunaj:  $\left(4^{\frac{1}{4}} + \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \left(4^{-0,25} - \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right)$

2. Uprosti izraze: a)  $\frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)^{-1}$  b)  $\sqrt[6]{\frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{ab + 2bx}} : \sqrt[3]{\frac{ab + 2bx}{(a - 2x)^2}} : \sqrt[4]{\frac{a^2 - 4x^2}{b^2}}$

3. Racionalisi: a)  $\frac{(a-1)\sqrt{a+1}}{\sqrt[6]{a+1}}$  b)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$  c)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}}$

4. Izračunaj vrednost izraza za datu vrednost x:  $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} - \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$  za  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Izvrši naznačene operacije: a)  $\sqrt{11-4\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$  b)  $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-1}}} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{x^{-1}}}}$

## OBLAST II: IMAGINARNI I KOMPLEKSNI BROJEVI:

**33.** Izračunaj:  $i^3$ .

Rešenje:  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$

**34.** Izračunaj:  $\sqrt{-36} + \sqrt{-16} + \sqrt{-64} - \sqrt{-49}$ .

Rešenje:

$\sqrt{-36} + \sqrt{-16} + \sqrt{-64} - \sqrt{-49} = \sqrt{36} \cdot (-1) + \sqrt{16} \cdot (-1) + \sqrt{64} \cdot (-1) - \sqrt{49} \cdot (-1) = 6i + 4i + 8i - 7i = 11i$

**35.** Izračunaj (svedi na oblik  $a + bi$ ):  $(3 + 2i) + (5 + 8i)$

Rešenje:

$(3 + 2i) + (5 + 8i) = 3 + 2i + 5 + 8i = 8 + 10i$

**36.** Izračunaj (svedi na oblik  $a + bi$ ):  $(6 + 2i)(6 - 2i)$ .

Rešenje:

$(6 + 2i)(6 - 2i) = 36 - 4i^2 = 36 - 4 \cdot (-1) = 40$

**37.** Izračunaj (svedi na oblik  $a + bi$ ):  $(3+i)(2+3i) - (1-i)^2$ .

Rešenje:

$$(3+i)(2+3i) - (1-i)^2 = 6 + 2i + 9i + 3i^2 - (1 - 2i + i^2) = 6 + 11i + 3i^2 - 1 + 2i - i^2 = 5 + 13i + 2 \cdot (-1) = 3 + 13i$$

**38.** Izračunaj (svedi na oblik  $a + bi$ ):  $\frac{3+2i}{1+i}$ .

Rešenje:  $\frac{3+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{3+2i-3i-2i^2}{1-(-1)} = \frac{3-i-2 \cdot (-1)}{2} = \frac{3-i+2}{2} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

**39.** Odredi module brojeva: a)  $4+3i$       b)  $7-2i$

Rešenje: a)  $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$       b)  $|z| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

**40.** Reši po  $z$  jednačinu:  $(2+i)z = 5+4i$ .

Rešenje:

$$(2+i)z = 5+4i \text{ Odavde je } z = \frac{5+4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(5+4i)(2-i)}{4-i^2} = \frac{10+8i-5i-4i^2}{4+1} = \frac{10+3i+4}{5} = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$$

**41.** Reši jednačinu po nepoznatoj  $z = x + yi$ :  $(1+i)x + (2+i)y = 5 + 3i$ .

Rešenje:

$$\begin{aligned} (1+i)x + (2+i)y &= 5 + 3i \\ x + ix + 2y + iy &= 5 + 3i \\ x + 2y + (x+y)i &= 5 + 3i \end{aligned} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} = \begin{cases} -x - 2y = -5 \\ x + y = 3 \end{cases} = \begin{cases} -y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} = \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kompleksan broj je:  $z = 1 + 2i$

**42.** Reši jednačinu po nepoznatoj  $z = x + yi$ :  $2x + (1+i)(x+y) = 7 + i$ .

Rešenje:

$$\begin{aligned} 2x + (1+i)(x+y) &= 7 + i \\ 2x + x + ix + y + iy &= 7 + i \\ 3x + y + (x+y)i &= 7 + i \end{aligned} \quad \begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x + y = 7 \\ -x - y = -1 \end{cases} = \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x = 6 \end{cases} = \begin{cases} 3x + y = 7 \\ x = 3 \end{cases} = \begin{cases} 9 + y = 7 \\ x = 3 \end{cases} = \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kompleksan broj je:  $z = 3 - 2i$

**43.** Odredi realne brojeve  $x$  i  $y$  ako je  $\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{-2+4i}$ .

Rešenje:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{-2+4i} \Rightarrow \frac{1}{x+iy} = \frac{(-2+4i) + (2+i)}{(2+i)(-2+4i)} \Rightarrow \frac{1}{x+iy} = \frac{5i}{-4-2i+8i+4i^2} \Rightarrow \frac{1}{x+iy} = \frac{5i}{-8+6i} \Rightarrow -8+6i = 5i(x+iy) \Rightarrow -8+6i = 5xi + 5yi^2 \Rightarrow -8+6i = 5xi - 5y$$

Odavde je  $x = \frac{6}{5} = 1,2$  a  $y = \frac{-8}{-5} = 1,6$

1. Uprosti izraz:  $\left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$ .

2. Racionališi: a)  $\frac{14}{\sqrt[4]{3} + \sqrt[8]{2}}$  b)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

3. Uprosti:  $\sqrt{4 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ .

4. Izračunaj:  $\left(2^0(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-0,75}\right) \cdot 3^{\frac{1}{4}} + \sqrt[4]{216}$ .

5. Nađi realne brojeve x i y tako da je  $(8 - 3i)x + (5 - 2i)y = -1$ .

## OBLAST III: KVADRATNA JEDNAČINA

44. Reši jednačinu:  $3x^2 = 0$ .

Rešenje:  $3x^2 = 0 \quad x^2 = 0 \quad x_{1,2} = 0$

45. Reši jednačinu:  $x^2 - 1 = 0$ .

Rešenje:  $x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x_{1,2} = \pm 1$

46. Reši jednačinu:  $x(2x + 1)(2x + 3) = 0$

Rešenje:  $x(2x + 1)(2x + 3) = 0 \quad x_1 = 0 \quad 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \quad 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x_3 = -\frac{3}{2}$

47. Reši jednačinu:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

Rešenje: Zadatak se može uraditi na dva načina: 1.

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$

2. način: Pomoću diskriminatne kvadratne jednačine:  $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

48. Reši jednačinu:  $\frac{2x-5}{x-11} + \frac{7-3x}{(x-6)^2+1} = \frac{x-4}{x-11} + \frac{(x-3)^2}{(x-6)^2+1}$ .

Rešenje:  $\frac{2x-5}{x-11} + \frac{7-3x}{(x-6)^2+1} = \frac{x-4}{x-11} + \frac{(x-3)^2}{(x-6)^2+1}$  jednačinu množimo sa  $(x-11)((x-6)^2+1)$  odnosno sa

$(x-11)(x^2-12x+37)$ . Dobijamo:

$(2x-5)(x^2-12x+37) + (7-3x)(x-11) = (x-4)(x^2-12x+37) + (x-3)^2(x-11)$

$2x^3 - 5x^2 - 24x^2 + 60x + 74x - 185 + 7x - 3x^2 - 77 + 33x = x^3 - 4x^2 - 12x^2 + 48x + 37x - 148 + x^3 - 11x^2 - 6x^2 + 66x + 9x - 99$   
 $- 32x^2 + 33x^2 + 174x - 160x - 262 + 247 = 0$

$x^2 + 14x - 15 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+15}}{1}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -15$

49. Reši jednačinu:  $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$ .

Rešenje:  $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0$   $|x+1| = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$

1)

$x \geq -1$

$x^2 + 2x - 3x - 3 + 3 = 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 1$

Rešenja su 0 i 1.

2)  $x < -1$

$x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$

$x_1 = -3 \vee x_2 = -2$

Rešenja su -3 i -2.

50. Reši jednačinu:  $|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$ .

Rešenje: Jednačina  $|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$  je ekvivalentna jednačini  $|x-6| \cdot |x-2| = x^2 - 8x + 12$ .

$|x-6| = \begin{cases} x-6, x \geq 6 \\ -x+6, x < 6 \end{cases}$

$|x-2| = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ -x+2, x < 2 \end{cases}$

1)  $x < 2$

$(-x+6)(-x+2) = x^2 - 8x + 12$

$x^2 - 6x - 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$

2)  $2 \leq x < 6$

$(-x+6)(x-2) = x^2 - 8x + 12$

$-x^2 + 6x + 2x - 12 = x^2 - 8x + 12$

$-2x^2 + 16x - 24 = 0$

Rešenja su  $(-\infty, 2)$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = 6 \vee x_2 = 2$

Rešenje je samo 2.

$$3) x \geq 6$$

$$(x-6)(x-2) = x^2 - 8x + 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = x^2 - 8x + 12$$

Rešenja su  $[6, +\infty)$

KONAČNO REŠENJE se dobija  $1) \cup 2) \cup 3)$  a to je  $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

$$51. \text{ Reši jednačinu ako su } a \text{ i } b \text{ realni parametri: } \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2.$$

Rešenje: Množenjem jednačine sa  $(x-a)(x-b)$  dobija se  $b(x-b) + a(x-a) = 2(x-a)(x-b)$ . Daljim sređivanjem se dobija:

$$xb - b^2 + ax - a^2 = 2(x^2 - ax - bx + ab)$$

$$xb - b^2 + ax - a^2 = 2x^2 - 2xa - 2xb + 2ab$$

$$2x^2 - 2xa - 2xb + 2ab - xb + b^2 - ax + a^2 = 0$$

$$2x^2 - 3xa - 3xb + a^2 + 2ab + b^2 = 0$$

$$a = 2; b = -3(a+b)x; c = (a+b)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3a+3b \pm \sqrt{(-3a-3b)^2 - 8(a+b)^2}}{4} = \frac{3a+3b \pm \sqrt{9a^2 + 18ab + 9b^2 - 8a^2 - 16ab - 8b^2}}{4} =$$

$$= \frac{3a+3b \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}{4} = \frac{(3a+3b) \pm (a+b)}{4}$$

$$x_1 = \frac{3a+3b+a+b}{4} = \frac{4a+4b}{4} = a+b \quad x_2 = \frac{3a+3b-a-b}{4} = \frac{2a+2b}{4} = \frac{a+b}{2}$$

$$52. \text{ Reši bikvadratnu jednačinu: } x^4 - 1 = 0.$$

Rešenje: Vršiti se smena  $x^2 = t$ . Dobija se jednačina:

$$t^2 - 1 = 0$$

$$(t-1)(t+1) = 0$$

$$t_{1,2} = \pm 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

$$x^2 = -1$$

$$x_{3,4} = \pm i$$

$$53. \text{ Reši bikvadratnu jednačinu: } x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Rešenje: Smena:  $x^2 = t$ . Dobija se jednačina:

$$t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-1}}{1} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

54. Reši bikvadratnu jednačinu:  $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$ .

Rešenje: Jednačina se može napisati i ovako  $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4+1} = 2$ . Smena:  $x^2+4 = t$ .

$$\frac{4}{t} + \frac{5}{t+1} = 2. \text{ Množenjem sa } t(t+1) \text{ dobija se: } 4t+4+5t = 2t^2+2t \Rightarrow 2t^2-7t-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{16}{4} = 4 \vee t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Vraćamo se na smenu i dobijamo:

$$x^2+4 - \frac{8}{7} = 0$$

$$x^2 = \frac{20}{7}$$

55. Reši jednačinu:  $\frac{34}{4x^2-1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$ .

Rešenje: Jednačinu množimo sa  $(2x-1)(2x+1)$  za  $|x| \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{34}{4x^2-1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$34 - (2x+1)^2 = (2x-1)^2$$

$$34 - 4x^2 - 4x - 1 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$34 - 8x^2 - 2 = 0$$

$$8x^2 - 32 = 0$$

$$8(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

56. Formiraj kvadratnu jednačinu ako su joj koreni:  $\frac{a}{a+b}$  i  $\frac{b}{a-b}$ .

Rešenje:  $x_1 = \frac{a}{a+b}$  i  $x_2 = \frac{b}{a-b}$ .

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right)x + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a-b} = 0$$

$$x^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x + \frac{ab}{a^2-b^2} = 0$$

57. Skрати razlomak:  $\frac{x^4 - 7x^3 + 12x^2}{3x^3 - 48x}$ .

Rešenje:  $\frac{x^4 - 7x^3 + 12x^2}{3x^3 - 48x} = \frac{x^2(x^2 - 7x + 12)}{3x(x^2 - 16)} = \frac{x(x-3)(x-4)}{3(x-4)(x+4)} = \frac{x(x-3)}{3(x+4)}$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3$$

58. Data je kvadratna jednačina  $(m+1)x^2 - 2(m+3)x + 9 = 0$ . Odredi realni parametar  $m$  da rešenja budu realna i jednaka.

Rešenje:

$$D = 0 \quad a = m+1, b = -2m-6, c = 9$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2m-6)^2 - 4(m+1) \cdot 9 = 0$$

$$4m^2 + 24m + 36 - 36m - 36 = 0$$

$$4m(m-3) = 0$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = 3$$

59. Reši jednačinu:  $|x-1| \cdot |x+2| = 4$ .

$$\text{Rešenje: } |x-1| = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, x < 1 \end{cases} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, x \geq -2 \\ -x-2, x < -2 \end{cases}$$

1)  $x < -2$

$$(-x+1)(-x-2) = 4$$

$$x^2 - x + 2x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

Rešenje je samo  $-3$  pošto je ono manje od  $-2$ .

2)  $-2 \leq x < 1$

$$(-x+1)(x+2) = 4$$

$$-x^2 + x - 2x + 2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

Rešenja su kompleksni brojevi.

3)  $x \geq 1$

$$(x-1)(x+2) = 4$$

$$x^2 - x + 2x - 2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

Samo je 2 rešenje.

Konačna rešenja su samo brojevi  $-3$  i  $2$ .

60. U jednačini  $4x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3m - 1 = 0$  odredi parametar  $m$  tako da rešenja po  $x$  budu jednaka.

Rešenje: Diskriminanta treba da bude jednaka 0.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2m-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - 3m - 1) = 0$$

$$4m^2 + 8m + 4 - 16m^2 + 48m + 16 = 0$$

$$-12m^2 + 56m + 20 = 0 \quad /: -4$$

$$3m^2 - 14m - 5 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{7 \pm 8}{3}$$

$$m_1 = \frac{15}{3} = 5 \quad m_2 = -\frac{1}{3}$$

61. Sastavi bar jednu kvadratnu jednačinu čija su rešenja  $4 \pm 5i$ .

Rešenje: Koristi se formula  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ .

$$x^2 - (4 + 5i + 4 - 5i)x + (4 + 5i)(4 - 5i) = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + 25 = 0$$

$$x^2 - 8x + 41 = 0$$

62. Data je jednačina  $(m + 1)x^2 - 2(m + 3)x + 9 = 0$ . Odredi realan broj  $m$  da rešenja budu a) realna i jednaka b) budu recipročni brojevi.

Rešenje: a) Da bi jednačina imala jednaka rešenja mora diskriminanta da bude jednaka  $D=0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(-2m - 6)^2 - 36(m + 1) = 0$$

$$4m^2 + 24m + 36 - 36m - 36 = 0$$

$$4m^2 - 12m = 0$$

$$4m(m - 3) = 0$$

$$m = 0 \vee m = 3$$

b) Da bi rešenja bila recipročna mora  $x_1 = \frac{1}{x_2}$  odnosno  $x_1x_2 = 1$ .

$$\frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{9}{m + 1} = 1$$

$$9 = m + 1$$

$$m = 8$$

63. U jednačini  $(k - 1)x^2 + (k - 5)x - (k + 2) = 0$  odredi parametar  $k$  tako da je  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ .

$$\text{Rešenje: } x_1 + x_2 = \frac{-k + 5}{k - 1} \quad x_1x_2 = \frac{-k - 2}{k - 1}$$

Nejednačinu ćemo pomnožiti sa  $x_1x_2$  i dobijamo

$$2(x_1 + x_2) > 2x_1x_2$$

$$\frac{-k + 5}{k - 1} > 2 \cdot \frac{-k - 2}{k - 1} \Leftrightarrow -k + 5 > -2k - 4 \Leftrightarrow k > -9$$

64. Konstruiši grafik funkcije  $y = x - |x + x^2|$  i ispitaj joj tok.

Rešenje:  $y = x - |x| \cdot |x + 1|$

I:  $x < -1$   $y = x - (-x)(-x + 1)$   $y = x - x^2 + x$   $y = -x^2 + 2x$

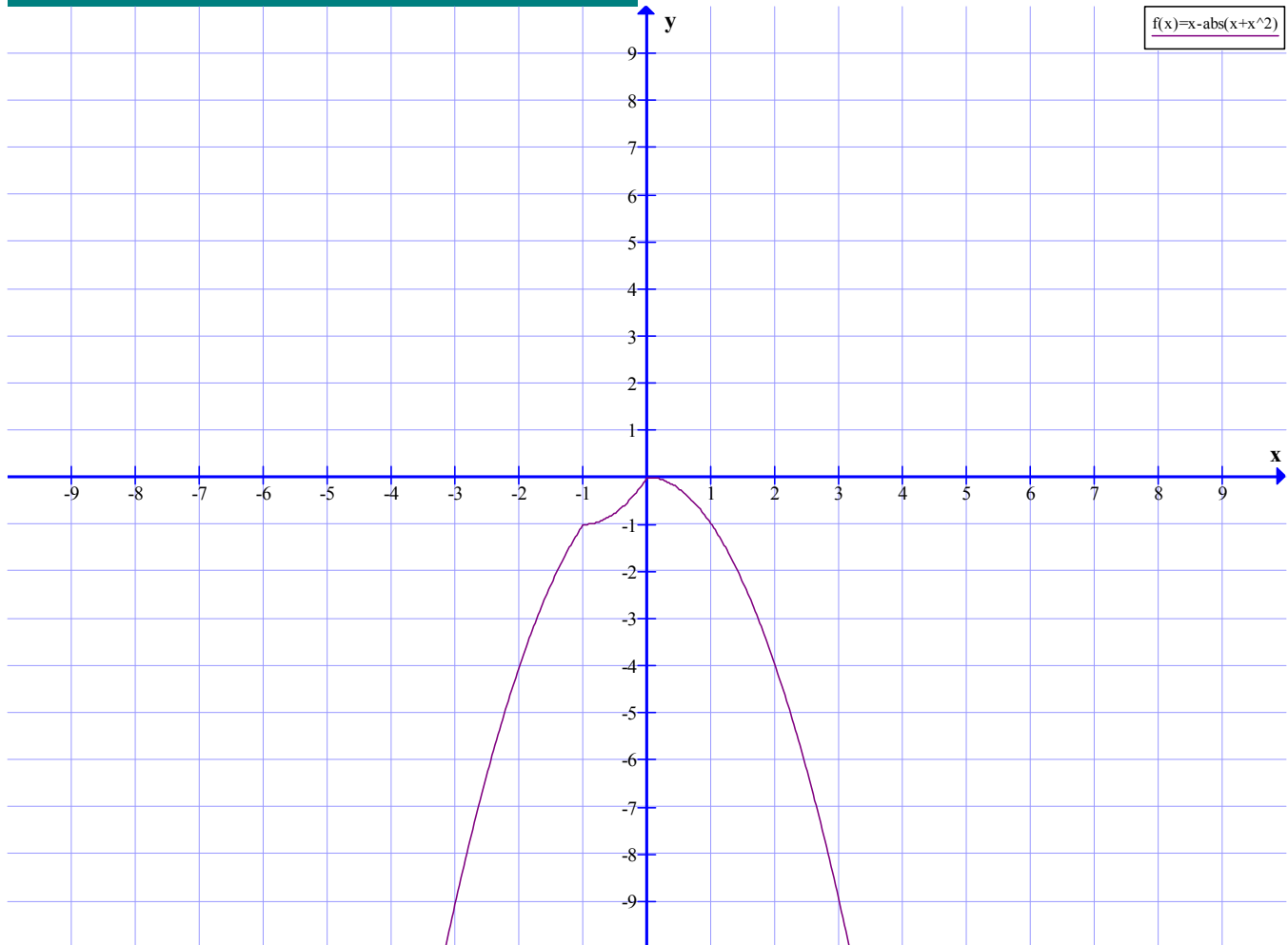
II:  $-1 \leq x < 0$   $y = x - (-x)(x + 1)$   $y = x + x^2 + x$   $y = x^2 + 2x$

III:  $x \geq 0$   $y = x - x(x + 1)$   $y = x - x^2 - x$   $y = -x^2$

I: a)  $a = -1$  b)  $\alpha = \frac{-2}{-2} = 1$   $\beta = \frac{-4}{-4} = 1$  c)  $-x^2 + 2x = 0$   $x(-x + 2) = 0$   $x = 0 \vee x = 2$  d)  $x = 0$   $y = 0$

II) a)  $a = 1$  b)  $\alpha = \frac{-2}{2} = -1$   $\beta = \frac{4}{4} = 1$  c)  $x(x + 2) = 0$   $x = 0 \vee x = -2$  d)  $x = 0$   $y = 0$

III: a)  $a = -1$  b)  $\alpha = 0$   $\beta = 0$  c)  $-x^2 = 0$   $x = 0$



65. Dat je skup funkcija  $y = ax^2 - 2x - 5$ . Odredi parametar  $a$  tako da funkcija dostiže maksimum za  $y = -2$ .

Rešenje:  $-2 = \frac{-20a - 4}{4a} \quad -8a = -20a - 4 \quad 12a = -4 \quad a = -\frac{1}{3}$

66. Reši nejednačinu  $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1$ .

Rešenje:

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} + 1 < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 5 + 2x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1} < 0$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} < 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = -3 \vee x = -2 \quad x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$x^2 + x - 6$	+	-	+	+	+
$2x^2 - x - 1$	+	+	+	-	+
$\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1}$	+	-	+	-	+

$-\infty \quad -3 \quad -2 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad +\infty$

$x \in (-3, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

67. Reši nejednačinu  $\left| \frac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x + 12} \right| \leq 1$ :

Rešenje: Data nejednačina je ekvivalentna sa nejednačinama:  $\frac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x + 12} \leq 1 \wedge \frac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x + 12} \geq -1$ .

Date dve nejednačine se rešavaju isto kao u prethodnom zadatku, a kao konačno rešenje se uzima presek rešenja date dve nejednačine. Konačno rešenje je  $x \in [-4, -3] \cup (0, +\infty)$ .

68. Reši sistem jednačina:  $\begin{cases} x + y^2 = 7 \\ xy^2 = 12 \end{cases}$

Rešenje: Ako uvedemo nepoznatu  $y^2 = z$ , dobijamo

$$\begin{array}{ll} x + z = 7 & xy = 5 \\ xz = 12 & x + y = 6 \\ x = 7 - z & x = 6 - y & xy = 6 \\ (7 - z)z = 12 & (6 - y)y = 5 & x + y = 6 \\ z_1 = 4 \quad z_2 = 3 & y_1 = 5 \quad y_2 = 1 & (2,3), (3,2) \\ x_1 = 4 \quad x_2 = 3 & (5,1), (1,5) \end{array}$$

69. Reši sistem jednačina  $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$ .

Rešenje: Ako uvedemo smene  $xy = z$   $x + y = t$  zamenimo u jednačinama dobijamo

$$zt = 30$$

$$z + t = 11$$

$$z = 11 - t$$

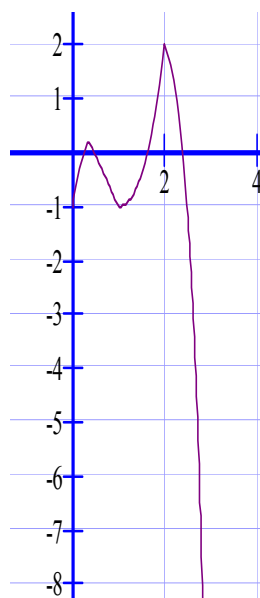
$$(11 - t)t = 30$$

$$t_1 = 6 \quad t_2 = 5$$

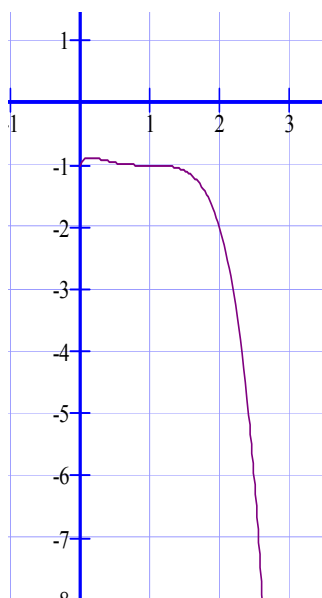
$$z_1 = 5 \quad z_2 = 6$$

$$(t, z) = (6, 5), (5, 6)$$

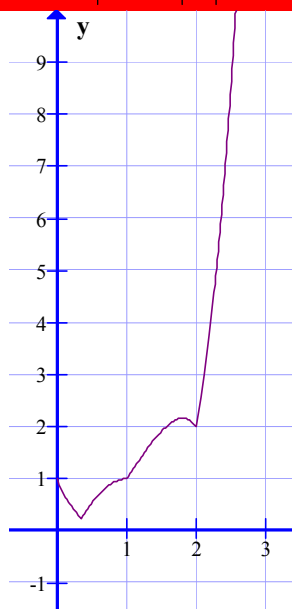
70. Koji od navedenih grafika pripada skupu funkcija  $y = |x^2 - x| - |2x - x^2|$ .



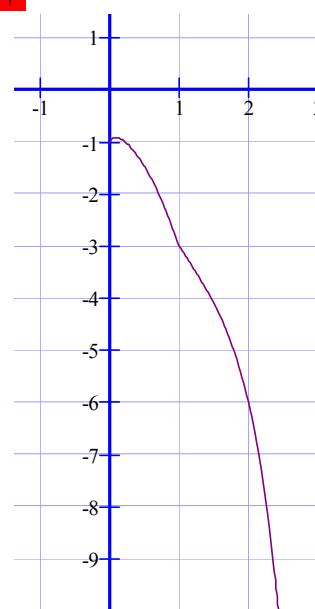
A



B



C



D

Rešenje: Tačan odgovor je pod A.