Владимир Бечејац

КОМБИНАТОРИКА

ПРЕ СВЕГА:

Комбинаторика је једна од тежих области која се ради у четвртој години средње школе и делује једноставо јер постоји свега неколико формула које ученик треба савладати. Међутим, задаци из ове области нису ни мало једноставни и захтевају доста размишљања. Постоји велики број задатака који се решава „пешачким“ путем без употребе икаквих формула. Овде ћемо се кроз примере упознати са скоро свим типовима задатака из комбинаторике, а оне теже задатке који захтевају доста размишљања и знања математике од раније обележени су са *.

Трудио сам се да задатке решим што детаљније тако да читалац може без икаквог ранијег знања из комбинаторике, пратећи решење, схвати принцип решавања задатака из ове области. Наравно, потрудите се прво да без гледања у решење дођете до коначног резултата, а да касније само то проверите. Ово је прва верзија ове збирке задатака, надам се да ћу је ускоро проширити.

У тексту је могуће да се поткрала нека формална или логичка грешка. Осим тога у области комбинаторике не постоји нека опште прихваћена метода за решавање задатака, па се неки читаоци неће сложити са начином решавања. Све сугестије можете послати на vbecejac@gmail.com

Пермутације: $P(n)=n!$ (1)

Пермутације са понављањем: $P_{a,b,c,\dots,z}(n)=\dfrac{n!}{a!b!c!\dots z!}$ (2)

Варијације: $V_k(n)=n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ (3)

Варијације са понављањем: $\overline{V_k}(n)=n^k$ (4)

Комбинације: $C_k(n)=\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}=\dbinom{n}{k}$ (5)

Комбинације са понављањем: $\overline{C_k}(n)=\dbinom{n+k-1}{k}$ (6)

!!! Ученици често греше код примене формуле (6) у којој се јавља $n+k-1$, а у формули (3) $n-k+1$!!!

1

Уколико је почетна пермутација 123456, која је по реду пермутација 341652.

Решење: Са 1 почињу **5!** пермутација, са 2 почињу **5!** пермутација, са 31 почињу **4!** пермутација, са 32 почињу **4!** пермутација, са 341 почињу **3!** пермутација, са 3412 почињу **3!,** са 3415 почињу **3!** пермутација, са 34162 почиње **1** и следећа је наша пермутација 341652. Дакле када саберемо болдоване изразе добијамо 120+120+24+24+6+6+6+1=307. Наша пермутација је 308.

2

Бирају се три студента прве, четири студента друге, пет студената треће и по два студента четврте и пете године. Потребно је изабрати делегацију од пет студената тако да године буду подједнако заступљене. На колико начина је то могуће учинити?

Решење: Овакав тип задатка је врло чест на пријемним испитима. Како имамо студенте из пет година и из сваке мора да буде заступљен барем један студен једино могуће решење је $\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 3\cdot4\cdot5\cdot2^2 = 240$.

3

Застава има 10 хоризонталних штрафта које могу бити плаве, беле или црвене, при чему две суседне штрафте не могу бити исте боје. Колико има оваквих застава?

Решење: На првом месту могу да се нађу све три боје, али на сваком осталом месту (од другог до десетог) могу да се нађу само две боје. Тако да је коначно решење $3\cdot9^2$.

4

Колико има а) шестоцифрених б) седмоцифрених природних бројева чији је збир цифара паран?

Решење: Користимо се идејом да паран број + паран број = паран број и непаран број + непаран број =паран број.
На првом месту могу да се нађу све цифре осим нуле. Дакле, има их 9, на другом такође 9 и тако све до последње цифре. Нека је наш број нпр. 15584_. Збир цифара овог броја је 23 и још додата цифра која се налази на месту доње црте (_). Да би број био паран мора да стоји нека од цифара 1,3,5,7,9. Да је неким случајем збир цифара (без последње цифре) био паран у обзир би дошли бројеви 0,2,4,6,8. Дакле, закључујемо да се на последњем месту може наћи само 5 цифара. Коначно решење је:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 450000$
Да је број био седмоцифрен решавало би се по истом принципу, а резултати би био 4500000.

5

Колико има а) **максимално** шестоцифрених б) **максимално** седмоцифрених природних бројева чији је збир цифара паран?

Решење: Суштинска разлика између задатака 4 и 5 у болдованим изразима (уместо њих могло је да пише барем шестоцифрених и барем седмоцифрених). Дакле, овде у случају под а) број може бити највише шестоцифрен, али може бити и једноцифрен, двоцифрен етц.
Парних једноцифрених има 5, двоцифрених са парним цифрама има $9 \cdot 5$, троцифрених $9 \cdot 10 \cdot 5$, четвороцифрених $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$ етц. Са случај под б) све је исто само укључујемо и седмоцифрене бројеве.

6

Колико грађанин треба да уплати лото тикета да би са 100% био сигуран да ће освојити премију? (У нашој земљи се заокружује 7 бојева од могућих 39)

Решење: $\binom{39}{7} = 15380937$. Чисто ради илустрације, нека једна лото колона кошта 10 динара, уколико бисте хтели да будете сигуран добитник морали бисте да дате 153 809 370 динара.

7*

Дати су скупови $A=\{a_1,...,a_m\}$ и $B=\{b_1,...,b_n\}$. На колико начина се може формирати уређена $(m+n)$-торка састављена од различитих елемната, ако се на њених првих p места налазе елементи из скупа А, а на последњих q места елементи из скупа B, при чему је $p\le m$ и $q\le n$.

Решење:Као што је већ било речи у уводу, задатке из комбинаторике можете решавати и „пешачки", али ће вам то одузимати доста времена. Овај задатак је специфичан по томе што не радимо са бројевима, већ са општим стварима.
Ради лакшег разумевања. Узмимо конкретно $m=6$, $n=4$, $p=4$ и $q=3$.
Поређајмо их све један до другог:
$\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4}_{p=4},a_5,a_6,b_1,\underbrace{b_2,b_3,b_4}_{q=3}$ или $\underbrace{a_2,\ a_4,\ a_1,\ a_5}_{p=4},a_6,a_3,b_4,\underbrace{b_1,b_3,b_2}_{q=3}$

Као што видимо на прве четири позиције (p) могу да постоје $\binom{6}{4}=10$ комбинација (ми смо кроз пример навели само 2) или да преведемо на опште бројеве $\binom{m}{p}$. Исти је случај и са елементима на q позицијама. Дакле, $\binom{n}{q}$. Остаје нам само да видимо шта је са елементима који се не налазе ни на првих p ни на последњих q позиција. Они врло једноставно могу да се добију пермутацијама. Из скупа А је остало још $m-p$ елемената, а из скупа B $n-q$ елемената. Дакле, решење је $(m-p+n-q)!$ пермутација. Коначно решење задатка је $\binom{m}{p}\binom{n}{q}(m-p+n-q)!$ што смо добили методом производа.

8

Колики је збир цифара свих бројева који се добијају пермутацијама цифара броја 123456789?

Решење: Израчунајмо прво збир свих бројева почетне пермутације. То је 1+2+3+...+9=45. Сада нађимо број свих пермутација датог броја. То је $9!=362880$. Коначно решење је $45\cdot 362880=16329600$

9

Колики је збир свих **бројева** који се добијају пермутацијама цифара броја 1234?

Решење: Суштинска разлика између 8. и 9. задатка је што су тамо биле цифре, а овде бројеви. Као пример: Нека имамо број 17. Збир свих бројева који се добијају пермутацијама цифара овог броја је 17+71=88. Овде је само компликованије јер је у питању четвороцифрени број.
На првом месту (месту највеће тежине) када пролазимо кроз пермутације могу бити цифре 1,2,3 и 4. Дакле
$6 \cdot 1000(1+2+3+4)+6 \cdot 100(1+2+3+4)+10 \cdot (1+2+3+4)+6(1+2+3+4)=66660$.
Да појаснимо одакле ова шестица: Напишимо неке пермутације броја 1234: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432. Видимо да их има 6 који почињу јединицом. Дакле цифре хиљада када се само саберу даће 6 и када помножимо са 1000 даће 6000 етц.

10

Четири црвене куглице, нумерисане бројевима 1,2,3 и 4 и шест црних куглица нумерисаних бројевима 5,6,7,8,9,10 треба поређати у низ тако да различито обојене куглице стоје наизменично. На колико начина је то могуће урадити.

Решење: $6! \cdot 4!$

11

У колико се пермутација скупа $\{1,2,3,4,5\}$ цифра 2 налази на трећем месту?

Решење: Када се 1 налази на првом месту, а остале цифре мењају места, цифра 2 ће се једанпут наћи на трећој позицији, када се 2 налази на првом, никада се 2 неће наћи на трећем, када 3 стоји на првом опет једанпут етц. Коначно решење је 4 пута. У општем случају ако скуп има n елемената цифра 2 (или било која друга) ће се наћи $n-1$ пута на задатој позицији (осим ако је задата позиција прва) ако су у питању пермутације.

12

На Олимпијском маратону учествују четири Руса, три Србина, два Француза и један Италијан. На колико је начина могуће распоредити заставе учесника маратона?

Решење: У питању су пермутације са понављањем.

$\frac{(4+3+2+1)!}{4!3!2!1!}=12600$

13

Имамо три беле и три црвене куглице. На колико начина је могуће поређати све куглице тако да а) распоред куглица буде произвољан б) све црвене и све беле буду суседне, в) све црвене куглице буду суседне, г) истобојне куглице не буду суседне?

Решење: а) $\frac{(3+3)!}{3!3!}=20$ користили смо комбинације са понављањем

б) 2 ЦЦЦБББ или БББЦЦЦ

в) $\frac{(3+1)!}{3!1!}=4$ ЦЦЦ=**Ц** **Ц**БББ, Б**Ц**ББ, ББ**Ц**Б, БББ**Ц**

г) 2

14

На колико начина се n лица могу распоредити на m столица, ако је $m>n$. Шта ако је $m<n$?

Решење: а) $\binom{m}{n}\cdot n!$ Имамо нпр. 3 човека које требамо распоредити на 8 столица. Дакле прво имамо $\binom{8}{3}$, а у свакој тој комбинацији та три човека могу да мењају места између себе. Дакле, још множимо са $3!$

б) $\binom{n}{m}\cdot m!$. Имамо нпр. 3 столице на које треба распоредити 8 људи. Прво треба да изаберемо која ће 3 човека сести, а то радимо на $\binom{8}{3}$ начина, а онда ти људи што су сели могу да се размештају на $3!$ начина. Методом производа лако долазимо до решења.

15

На колико начина се 10 људи може сместити на 10 столица округлог стола?

Решење: У задацима типа „округли сто“ требамо водити рачуна да ако дође до ротације за по једно или више места око стола то је опет иста комбинација људи који седе. Овај задатак је најлакше решити тако што једног човека фиксирамо за једно место округлог стола, а преосталих 9 „прошетамо“ столом на 9! начина што је и решење задатка.

16

На колико начина се 10 људи може сместити на 15 столица округлог стола?

Решење: Фиксирајмо једног човека за једно место округлог стола. Преосталих 9-оро људи можемо да распоредимо на $\binom{14}{9}$ начина и сада ти људи у сваком начину може да се мења се местима на којима седе, дакле још пута $9!$. Коначно решење се добија методом производа и гласи $\binom{14}{9}9!$.

17

Десет играча играју мали фудбал тако што формирају две екипе од по пет играча. На колико начина могу да формирају екипе?

Решење: Дакле, од 10 играча нама треба 5 и то можемо урадити на $\binom{10}{5}=252$ начина. Коначно треба да поделимо са 2 јер су у питању 2 екипе. Коначно решење је 126.

18*

Наћи број комбинација k-те класе скупа $\{1,2,3,...,n\}$ у којима се налази тачно s елемената из скупа $\{1,2,3,...,m\}$. $(s \le k \le m \le n)$

Решење: Одредимо прво број комбинација s-те класе из скупа $\{1,2,3,...,m\}$. Имамо $\binom{m}{s}$, али остало је још да одредимо број комбинација скупа $\{m+1,m+2,...,n\}$ $k-s$-те класе. Дакле, коначно решење је $\binom{m}{s}\binom{n-m}{k-s}$

19

Дате су све варијације са понављањем класе 12 елемената скупа $A=\{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$. Колико пута је записан елемент a_1?

Решење: За разумевање овог задатка поставимо прво задатак да нађемо колико је пута исписана цифра 1 у свим варијацијама са понављањем класе 2 елемената скупа $A=\{1,2,3,4,5\}$.

> Када не можете да решите задатак са великим бројевима, дајте неки мањи пример који бисте могли и „пешачки" да решите, па сходно томе руководите се тежим задацима

Испишимо варијације класе 2 овог скупа

12	13	14	15	23	24	25	34	35	45
21	31	41	51	32	42	52	43	53	54
			11	22	33	44	55		

Приметимо да се сваки елемент јавља исти број пута. Укупно комбинација има $5^2=25$. Како су комбинације 2 класе, укупно исписаних бројева има $2\cdot 25=50$. Имамо 5 елемената, дакле коначно је $\frac{50}{5}=10$. Број 1 је записан 10 пута. Срж задатка је било да се примети да се елементи јављају исти број пута.

Применимо ово на задатак. Укупно варијација има 20^{12}. Укупно исписан бројева има $12\cdot 20^{12}$. Број a_1 је исписан $\frac{12\cdot 20^{12}}{20}=12\cdot 20^{11}$

20

Колико постоји пермутација шпила од 32 карте при којима ћемо добити сва четири попа у првих 10 карата?

Решење: Та четири попа можемо у првих 10 карата распоредити на $\binom{10}{4}$ начина, осталих 28 карата можемо распоређивати на $28!$ начина и како попови нису сви исти (пик, треф, херц и каро) њих можемо још распоредити на $4!$ начина. Коначно методом производа добијамо $\binom{10}{4}28!4!$.

21

Дат је скуп од 5 баба и 2 жабе. Одредити број подскупова датог скупа у којима се не мешају бабе и жабе.

Решење: Број подскупова у којима се налазе само бабе је $2^5 = 32$, а број подскупова у којима се налазе само жабе је $2^2 = 4$. Тражени број је 32+4-1=35. Напомена: одузели смо један јер је то празан скуп.

22

Колико има природних бројева са највише n цифара у којима се појављују цифре 3 и 5?

Решење: Посматрајмо случај: Колико има природних бројева у којима се не појављују цифре 3 и 5? Таквих има $8^n - 1$. Искључили смо 0.
Колико има природних бројева са највише n цифара? $10^n - 1$ (искључили смо нулу). Коначно решење: $10^n - 1 - 8^n + 1 = 10^n - 8^n$

23

По пет црвених, правих, белих и жутих куглица треба поређати у низ тако да ма које четири суседне куглице буду различите боје. На колико начина је то могуће учинити ако су а) куглице ненумерисане б) куглице нумерисане?

Решење: а) Уколико куглице нису нумерисане то је могуће урадити на 4! начина.
б) Уколико су нумерисане резултат је $4!(5!)^4$

24

На колико начина се 10 истих куглица може сместити у 3 кутије.

Решење: $\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$.

25

На колико начина се може осам белих шаховских фигура (два топа, два коња, два ловца, краљ и дама) поставити на првом реду шаховске табле?

Решење: $\frac{8!}{2!2!2!}$

26

На колико начина се за округлим столом могу распоредити 5 мушкараца и 5 жена тако да особе истог пола не седе једна до друге?

Решење: Поставимо рецимо мушкарца на једно фиксно место за округлим столом. Тада преостале мушкарце можемо да разместимо на 4! начина, а жене на 5!. Решење је 4!5!.

27

Од 12 витезова округог стола свака два суседа су у завади. На колико начина они могу између себе изабрати двочлану делегацију за посету краљу Артуру, а да чланови делегације нису у завади?

Решење: Изаберимо једног витеза, како је он у завади са своја 2 суседа. Он може да направи делегацију за посету са још 9 витезова. Дакле, имамо 9 могућности. Како имамо 12 витезова добијамо $12\cdot 9$, али овај производ смо 2 пута урачунали па морамо да поделимо са 2 и коначно добијамо 54. Задатак смо могли решити и на други начин. Посматрајмо да сваки витез седи на темену 12-то угла. Број дијагонала је $\frac{n(n-3)}{2}$ па опет добијамо резултат 54.

28

За округлим столом треба распоредити 9 људи: 3 инжењера, 3 доктора и 3 наставника, тако да су међу било које три узастопно изабране особе по један инжењер, доктор и наставник (не мора овим редом). На колико начина се то може исвести?

Решење: Изаберимо једног инжењера и поставимо га на неко фиксирано место. Преостала 2 могу да се распореде на 2! начина, доктори могу на 3! начина и наставници на 3! начина. Међутим између 2 инжењера не мора се налазити доктор па наставник, већ може и наставник па доктор. Укупно начина постоји 2!3!3!2=144.

29

Око округлог стола треба распоредити 3 инжењера, 3 доктора и 3 наставника тако да између свака 2 инжењера буде по један доктор и један наставник. На колико начина се то може урадити?

Решење: Суштинска разлика између овог и претходног задатка је у томе што овде не мора да сваке три особе буду инжењер, доктор и наставник. Фиксирајмо једног инжењера, остали могу да се поставе на 2! начина, доктори на 3!, наставници на 3!, али сада свака двојка наставник-доктор може да ротира па је коначан одговор 3!2!3! $2 \cdot 2 \cdot 2 = 576$

30

Колико има троцифрених бројева са различитим цифрама?

Решење: Користићемо варијације без понављања. $10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$. Одузели смо цифре код којих је нула на првом месту. Задатак смо могли решити и на следећи начин: Укупан број троцифрених бројева је 900. Бројева са све три исте цифре има 9, бројева са 2 исте цифре има $27 \cdot 9$. Када се од 900 одузме збир 9 и $27 \cdot 9$ добијамо исти резултат.

31

Ако се регистарске таблице на аутомобилима састоје од два слова азбуке, која има 30 слова, и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999), колико се може различитих таблица формирати? (задатак са пријемог испита за упис на Техничке факултете 1995. године)

Решење: Слова можемо да изаберемо на 30^2 начина (варијације са понављањем) и бројеве на 10^4 начина. Коначно добијамо методом производа $9 \cdot 10^6$ начина.

32

На колико начина се могу разместити 4 различите куглице у 5 различитих кутија, ако у свакој кутији може да се стави произвољан број куглица?

Решење:

!!! У задатку је речено да су куглице различите

Свака од куглица се може сместити на 5 начина. Коначно 5^4.

!!! У општем случају да смо имали k куглица РАЗЛИЧИТИХ и n различитих кутија било би n^k могућности

33

Од 10 људи треба изабрати 6 и распоредити их на 6 радних места. На колико начина је то могуће урадити?

Решење: Бирамо 6 од 10. То радимо помоћу комбинација $\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=210$.

Сада све изабране људе можемо да распоредимо на $6!$ места. Коначан одговор је 151200.

34

На завршницу турнира на Олимпијским играма у Пекингу пласирало се 8 атлетичара. На колико начина организатор може да подели златну, сребрну и бронзану медаљу?

Решење: Бирамо прво 3 од 8. То можемо урадити на $\binom{8}{3}=56$ начина. Сада за сваку тројку, нека смо нпр. изабрали Јамајчанина, Американца и Кенијца они могу добити медаље златну, сребрну и бронзану респективно, али може бити и сребрна, бронзана, златна итд. Дакле, још $3!=6$. Коначно: $56\cdot 6=336$.

35

Универзитет у Београду, добио је писмо од научника у ЦЕРН-у да треба саставити петочлану комисију у којој ће бити бар 2 електроинжењера, бар 1 физичар и бар један хемичар. Универзитету су на располагању 6 електроинжењера, 4 физичара и 3 хемичара. На колико начина Универзитет може направити комисију за ЦЕРН? (*Напомена: Овакав тип задатака је врло чест на пријемним испитима из математике*)

Решење: $\binom{6}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{2}=690$

36

Свака страница квадрата је подељена на n делова. Колико се може конструисати троуглова чија су темена тачке поделе?

Решење: Ако смо квадрат поделили на нпр. 3 дела онда постоје 2 тачке. Како овде радимо са општим бројем постоји $n-1$ тачка на једној страници квадрата. Укупан број тачака је онда $4n-4$. Како нам требају троуглови $\binom{4n-4}{3}$, али у ово решење смо узели и колинеарне тачке (тачке које леже на истој правој), морамо да их избацимо, а то радимо на $4\binom{n-1}{3}$ начина.

Коначан одговор је $\binom{4n-4}{3}-4\binom{n-1}{3}$.

36

Од 8 ученика треба изабрати 4 за пут, али зна се да ако је изабран Лука онда мора да иде и Анђела. На колико начина је то могуће учинити?

Решење: Ако су Лука и Анђела сигурни путници онда преосталих 6 ученика можемо да изаберемо на $\binom{6}{2}=15$ начина. Али, ако Лука није изабран онда имамо $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=35$. Коначно имамо 15+35=50.

37

На колико начина можемо формирати колону у којој ће бити 7 мушкараца и 4 жене ако знамо да жене не смеју бити једна до друге?

Решење: Распоредимо прво мушкарце на 7! начина. Позиције на којима могу да се нађу жене има (на слици кружићи) 8. Дакле $\binom{8}{4}$, а још сада них можемо да ротирамо на 4! начина. Коначан одговор је $7!4!\binom{8}{4}$.

○□○□○□○□○□○□○□○

38

За фудбалску екипу Матија треба треба да изабере 4 своја другара од 10 који стоје у реду, али да никоја два друга не стоје један до другог?

Решење: Овакав тип задатака се решава на следећи начин: Узмимо 4 друга из реда, остало их је шесторица. Ова четири друга су могла да се нађу на 7 места (2 са краја и 5 између ове шесторице). Коначно решење је

$$\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=35$$

39

Једно одељење средње школе добило је награду да 24 ученика иде на екскурзију. У хотелу постоји 8 трокреветних соба. На колико начина је могуће распоредити ученике?

Решење: $\binom{24}{3}\binom{21}{3}\binom{18}{3}\binom{15}{3}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{8!}$

40*

Дат је скуп А који има n елемената. Колико има комутативних бинарних операција код којих је $(\forall x \in A)\ \ x * x \neq x$?

Решење: Типови задатака код којих се помињу бинарне операције најлакше решавамо помоћу Кејлијеве таблице.

*	1	2	3	...	n
1					
2					
3					
...					
n					

Посматрајмо прво елементе ван главне дијагонале. У услову задатка за њих се ништа не каже па може да стоји било који број од 1 до n. Позиција ван главне дијагонале имамо $n^2 - n$, а број начина на који можемо да их попунимо је n^{n^2-n}. Посматрајмо сада главну дијагоналу: нпр. 1*1 може дати било који број осим 1. Дакле на главној дијагонали имамо n позиција, а број могућности за попуњавање је $n-1$. Коначно решење је $(n-1)^n \cdot n^{n^2-n}$.

41

Четворо деце треба да поделе 20 јабука. На колико начина је то могуће учинити?

Решење: У питању су комбинације са понављањем. Резултат је

$$\binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = \binom{23}{3} = 1771$$

!!! Ради се о истим обејктима

42

На колико начина 20-торо деце могу да поделе 4 јабуке?

Решење: $\binom{20+4-1}{4} = \binom{23}{4}$

43

На колико начина се 5 црвених, 6 белих и 7 плавих куглица може распоредити у 8 кутија, ако се куглице исте боје не разлукују међусобно?

Решење: $\binom{5+8-1}{5}\binom{6+8-1}{6}\binom{7+8-1}{7}$

44

На колико начина можемо 6 различитих куглица распоредити у 12 кутија, али тако да 10 кутија остану празне?

Решење: Прво треба да изаберемо које 2 кутије ће садржати куглице. То можемо урадити на $\binom{12}{2}$ начина. Датих 6 куглица у 2 кутије можемо распоредити на 2^6 начина, али у те начине смо урачунали и 2 начина када је једна од кутија празна. Дакле, коначан одговор је $\binom{12}{2}\left(2^6-2\right)$

45

На колико начина се 25 кликера може поделити на три групе тако да прва група садржи 10, друга 7, а трећа 8 кликера?

Решење: $\binom{25}{10}\binom{15}{7}\binom{8}{8}$

46

Колико се бинарних релација може дефинисати у скупу X који је састављен од n елемената? Колико постоји а) рефлексивних б) симетричних в) рефлексивних и симетричних релација?

Решење: Број свих бинарних релација је према дефиницији 2^{n^2}
а) Из прве године знамо да рефлексивна релација има све јединице на главној дијагонали, ван главне дијагонале могу да се налазе било који елементи (0 или 1). Како имамо 2 елемента, а број позиција на које можемо да их упишемо је n^2-n (од укупног броја позиција у таблици одузели смо број позиција главне дијагонале), решење је 2^{n^2-n}.

ρ	1	2	3	...	n
1	1				
2		1			
3			1		
...				...	
n					1

б) Симетрична релација може имате било 1 било 0 на главној дијагонали, али мора имати симетричне елементе у односу на њу (види слику). На главној дијагонали имамо 2^n могућих комбинација за попуњавање, а ван главне дијагонале имамо $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ (у експоненту је дељено са 2 јер нас интересују само елементи испод или изнад главне дијагонале, ако смо узели да попуњавамо позиције испод главне дијагонале, како је релација симетрична, „аутоматски“ се попуњавају и елементи изнад главне дијагонале). Коначно $2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

*	1	2	3	...	n
1	0	**1**			**0**
2	**1**	1			
3			1		
...				...	
n	**0**				0

в) Да бисмо решили овај део задатка морамо да познајемо принцип укључења-искључења. Зашто? Зато што може да се деси да је нека релација и рефлексивна и симетрична.
Од укупног броја релација одузећемо рефлексивне, одузећемо симетричне и додаћемо збир рефлексивних и симетричних.

$$2^{2^n} - 2^{n^2-n} - 2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}} + 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

!!! Овакав начин решавања задатака (преко принципа укључења-искључења) решава се још у првој години, а задаци су типа да у неком одељењу има нпр. 20 који уче и енеглески и француски, 15 само француски етц. !!!