

∫ ИНТЕГРАЛИ ∫

1. Израчунати интеграле:

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \left(\frac{x^2 - 3}{x} \right)^2 dx & 2) \int \frac{(x + \sqrt{x})^3}{x\sqrt{x}} dx & 3) \int \frac{1 - 3x}{x + 3} dx & 4) \int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} dx \\
 5) \int \frac{dx}{4x^2 + 3} & 6) \int \frac{2 + \sqrt{x}}{x} dx & 7) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} & 8) \int (e^x - 1)^2 dx \\
 9) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx & 10) \int \cos^2 x dx & 11) \int \frac{2dx}{\cos 2x + 1} & 12) \int (\sin 3x - \cos 3x)^2 dx \\
 & 13) \int \frac{dx}{1 - \cos x} & &
 \end{array}$$

2. Погодно изабраном сменом израчунати интеграле:

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \frac{xdx}{2x^2 + 3} & 2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}} & 3) \int \frac{x - \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx & 4) \int \frac{dx}{\sin x} \\
 5) \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - 1} & 6) \int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 13} & 7) \int \frac{dx}{(2x - 3)^5} & 8) \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x} \\
 9) \int \sin^5 3x dx & 10) \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \sin 2x dx & 11) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} & 12) \int \operatorname{tg}^4 x dx \\
 13) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx & 14) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx & 15) \int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{5x^2+1}} & 16) \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}
 \end{array}$$

3. Методом парцијалне интеграције израчунати интеграле:

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \ln x dx & 2) \int 3x^2 \ln x dx & 3) \int \ln \frac{x}{x+1} dx & 4) \int x e^{-x} dx \\
 5) \int (x^2 + 5x) e^{2x} dx & 6) \int \arcsin x dx & 7) \int x \sin 3x dx & 8) \int 2x \operatorname{arctg} x dx
 \end{array}$$

4. Нека је $P = \int \sin^2 x dx$. Ако применимо формулу парцијалне интеграције и то тако да је $u = \sin x$, $dv = \sin x dx$. Одавде следи да је $du = \cos x dx$ и $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Тада је:

$$P = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \sin^2 x dx. \text{ Одавде следи:}$$

$$P = -\frac{1}{2} \sin 2x + x - P. \text{ Добијамо једначину по } P: 2P = x - \frac{1}{2} \sin 2x. \text{ Следи:}$$

$$\int \sin^2 x dx = P = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \text{ Поступајући на сличан начин израчунати:}$$

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \cos^2 3x dx & 2) \int e^{\arcsin x} dx & 3) \int \sqrt{1 - x^2} dx & 4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}
 \end{array}$$

∫ ИНТЕГРАЛИ ∫

ПРЕ СВЕГА:

Таблица интеграла:

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

ОСОБИНЕ НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА:

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА:

Ако функције $u(x)$ и $v(x)$ имају у неком интервалу D непрекидне изводе, онда је

- $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$

Њутн-Лајбницова формула: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ где је $F'(x) = f(x)$

Парцијална интеграција: $\int_a^b f(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Површина равне површи ограничене Ox осом, кривом $y = f(x)$ и правама $x = a$ и $x = b$:

$$P = \int_a^b |f(x)|dx$$

Ако је површина ограничена са две криве $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, правама $x = a$ и $x = b$, онда је њена површина:

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Дужина лука криве, између тачака чије су апсцисе a и b је: $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

Површина која настаје обртањем лука криве $y = f(x)$ око осе Ox између тачака чије су апсцисе a и b је:

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Запремина тела која настаје обртањем површи око осе Ox лука криве $y = f(x)$:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

1) Израчунати интеграле:

$$1) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$\text{Решење: } \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$

$$2) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$$

$$\text{Решење: } \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3} + C$$

$$\text{Смена: } \arcsin x = t \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$$

3) $\int \sin^3 x dx$ (Напомена: ако је подинтегрална функција облика $\sin^n x$ или $\cos^n x$, где $n \in \mathbb{N}$, користимо смене $\sin x = t$ ако је n облика $2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$ или $\cos x = t$ ако је n облика $2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$)

$$\text{Решење: } \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (1 - t^2) dt = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\text{Смена: } \cos x = t \Rightarrow \sin x dx = dt$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} &= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{(1+tg^2 t)^3}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}} = \int \cos t dt = \sin t + C = \\ &= \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \end{aligned}$$

$$\text{Смена: } x = tgt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

У задатку смо користили једну од основних идентичности у тригонометрији: $\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}}$

$$5) \int \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

Решење:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{\sqrt[6]{t^6} - \sqrt{t^6}}{1 + \sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^6 - t^8}{1 + t^2} dt = 6 \int \left(-t^6 + 2t^4 - 2t^2 + 2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt$$

$$\text{Смена: } x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt \quad t = \sqrt[6]{x}$$

$$= 6 \left(-\int t^6 dt + 2\int t^4 dt - 2\int t^2 dt + 2\int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = 6 \left(-\frac{t^7}{7} + 2 \cdot \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + 2t - 2 \operatorname{arctg} t \right) =$$

$$= -\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + \frac{12}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 12\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C$$

Вршили смо дељење разломка (3. разред) јер је степен бројиоца већи од степена имениоца и добили :

$$(-t^8 + t^6) : (t^2 + 1) = -t^6 + 2t^4 - 2t^2 + 2 - \frac{2}{t^2 + 1}$$

$$6) \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x} \quad (\text{Напомена: често се функције рационалне по } \sin x \text{ или по } \cos x \text{ итеграле сменом}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ одавде је } dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2})$$

$$\text{Решење: } \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8+2t^2} = \int \frac{2dt}{2(4+t^2)} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

$$\text{Смена: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$7) \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$$

Решење:

$$\text{Смена: } \operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt. \text{ У задатку ћемо користити и основну идентичност да је: } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2}{1+t^2+3}} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x) + C$$

$$8) \int \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln x)}$$

$$\text{Смена: } \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \ln x (1 + \ln x)} &= \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{t+1-t}{t(t+1)} dt = \int \frac{t+1}{t(t+1)} dt - \int \frac{t}{t(t+1)} dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| + C \\ &= \ln|\ln x| - \ln|\ln x + 1| + C = \ln \left| \frac{\ln x}{\ln x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$9) \int \cos^3 x \sin 2x dx$$

$$\int \cos^3 x \sin 2x dx = \int \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cos x dx = 2 \int \cos^4 x \sin x dx = -2 \int t^4 dt = -2 \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{2}{5} \cos^5 x + C$$

$$\text{Смена: } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$10) \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

$$\text{Решење: } \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot \sin 2x dx = \int \sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x dx = -2 \int \sqrt{1 + 3t^2} \cdot t dt = -2 \int t_1 \cdot \frac{t_1 dt}{3} =$$

$$\text{Прва смена: } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt$$

$$\text{Друга смена: } 3t^2 + 1 = t_1^2 \Rightarrow 6t dt = 2t_1 dt \Rightarrow t dt = \frac{t_1 dt}{3} \quad t_1 = \sqrt{3t^2 + 1}$$

$$= -\frac{2}{3} \int t_1^2 dt_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{t_1^3}{3} + C = -\frac{2}{9} \sqrt{(3t^2 + 1)^3} + C = -\frac{2}{9} \sqrt{(3 \cos^2 x + 1)^3} + C$$

$$11) \int \operatorname{tg}^4 x dx$$

Решење:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} - 2 \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^4 x} - 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

Упутство за решавање интеграла $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}} = \int \frac{dt}{\frac{1}{(1 + t^2)^2}} = \int (1 + t^2) dt = \int dt + \int t^2 dt = t + \frac{t^3}{3} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$$

$$\text{Смена: } \operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow dx = \cos^2 x dt = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$12) \int ctg^4 x dx$$

Решење:

$$\begin{aligned} \int ctg^4 x dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^4 x} - 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int dx = \\ &= -\frac{1}{3tg^3 x} - \frac{1}{tgx} + 2ctgx + x + C \end{aligned}$$

Упутство за решавање $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{1+2t^2+t^4}} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4} = \int t^{-4} dt + \int t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3tg^3 x} - \frac{1}{tgx}$$

$$13) \int x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Решење: } \int x\sqrt{1-x^2} dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x)^3} + C$$

$$\text{Смена: } 1-x^2 = t^2 \Rightarrow xdx = -tdt \quad t = \sqrt{1-x^2}$$

$$14) \int x^2\sqrt{x^3+2} dx$$

$$\text{Решење: } \int x^2\sqrt{x^3+2} dx = \int t \cdot \frac{5}{3}t^4 dt = \frac{5}{3} \int t^5 dt = \frac{5}{3} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{5}{18} \sqrt[6]{(x^3+2)^6} + C$$

$$\text{Смена: } x^3+2 = t^5 \Rightarrow x^2 dx = \frac{5}{3}t^4 dt \quad t = \sqrt[5]{x^3+2}$$

$$15) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Решење: } \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int \sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \int \frac{tdt}{t} = \\ &= \arcsin x + t + C = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\text{За интеграл } \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ користимо смену } 1-x^2 = t^2 \Rightarrow xdx = -tdt$$

$$16) \int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$$

$$\text{Решење: } \int \sin(\ln x) \frac{dx}{x} = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C$$

$$\text{Смена: } \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$$

Решење: Смена: $x+1 = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} &= \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int t^2 dt - 6 \int t dt + 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln|t+1| + C = 2\sqrt[6]{(x+1)^3} - 3\sqrt[6]{(x+1)^2} + 6\sqrt{x+1} - 6 \ln|\sqrt[6]{x+1} + 1| + C = \\ &= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt{x+1} - 6 \ln|\sqrt[6]{x+1} + 1| + C \end{aligned}$$

Код интеграла $\int \frac{t^3 dt}{t+1}$ вршимо дељење $t^3 : (t+1) = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$

$$18) \int \sqrt{9-x^2} dx$$

Решење:

Смена: $x = 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t dt$ $t = \arcsin \frac{x}{3}$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9-x^2} dx &= \int \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = \int 3\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 9 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt \\ &= 9 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \frac{9}{2} \int dt + \frac{9}{2} \int \cos 2t dt = \frac{9t}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos t_1 dt_1 = \frac{9t}{2} + \frac{9}{4} \sin t_1 = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \sin 2t + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + 2 \sin t \cos t + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} + C = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + 2x\sqrt{9-x^2} + C \end{aligned}$$

$$19) \int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} dx \text{ (интеграција рационалних функција)}$$

Решење: $\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(x+1 + \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} dx$

Користили смо прво дељење $(x^3 + 2x) : (x^2 - x - 2)$. Сада рачунамо:

$$\frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-2)} = \frac{x(A+B) - 2A + B}{(x+1)(x-2)}$$

$5 = A + B \wedge -2A + B = 2$. Решење овог система је $(A, B) = (1, 4)$. Даље је интеграл једнак:

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{4dx}{x-2} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + 4 \ln|x-2| + C$$

$$20) \int \frac{xdx}{(2x-1)(x-1)}$$

Решење: $\int \frac{xdx}{(2x-1)(x-1)} = \int \frac{-dx}{2x-1} + \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \ln|2x-1| + \ln|x-1| + C$

Разломак $\frac{x}{(2x-1)(x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + 2Bx - B}{(2x-1)(x-1)}$. Одавде $A + 2B = 1 \wedge -A - B = 0$, следи

$$A = -1 \quad B = 1.$$

2) Методом парцијалне интеграције израчунати интеграле:

1) $\int \ln x dx$

Решење:

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \int dx = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$$

2) $\int 3x^2 \ln x dx$

Решење:

$$u = \ln x \quad dv = 3x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \int 3x^2 dx = x^3$$

$$\int 3x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \int x^3 \cdot \frac{dx}{x} = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C$$

3) $\int \ln^2 x dx$

Решење:

$$u = \ln^2 x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{2 \ln x dx}{x} \quad v = x$$

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot \frac{2 \ln x dx}{x} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x - 2x + C$$

Интеграл $\int \ln x dx$ се решава парцијалном интеграцијом као у примеру 1).

4) $\int \ln \frac{x}{x+1} dx$

Решење:

$$u = \ln \frac{x}{x+1} \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x(x+1)} \quad v = x$$

$$\int \ln \frac{x}{x+1} dx = x \ln \frac{x}{x+1} - \int x \cdot \frac{dx}{x(x+1)} = x \ln \frac{x}{x+1} - \int \frac{dx}{x+1} = x \ln \frac{x}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

5) $\int x e^{-x} dx$

Решење:

$$u = x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} = -e^{-x} \quad \text{Смена: } -x = t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$6) \int (x^2 + 5x)e^{2x} dx$$

Решење:

$$u = x^2 + 5x \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = (2x + 5)dx \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \text{Смена: } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 5x)e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{1}{2} \int e^{2x} (2x + 5) dx = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{1}{2} (\int 2xe^{2x} dx + \int 5e^{2x} dx) = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{1}{2} (2 \int xe^{2x} dx + 5 \int e^{2x} dx) = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \int xe^{2x} dx - \frac{5}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{5}{4} e^{2x} + C = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{5}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 5x) - \frac{x}{2} e^{2x} - e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 + 4x - 2) + C \end{aligned}$$

За интеграл $\int xe^{2x} dx$ смо опет користили парцијалну интеграцију:

$$u = x \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$7) \int \arctg x dx$$

Решење:

$$u = \arctg x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = x$$

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\text{Код интеграла } \int \frac{xdx}{1+x^2} \text{ користили смо смену } x^2 + 1 = t \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

3 Израчунати интегале уз помоћ Њутн-Лајбницевог формуле или погодне смене следеће интегале:

$$1) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

Решење:

$$\begin{aligned} \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx &= \sqrt{2} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \sqrt{2} \cdot \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^8 + \left. \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right|_0^8 = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{8^3} - 0) + \frac{3}{4} (\sqrt[3]{8^4} - 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 16\sqrt{2} + \frac{3}{4} \cdot 16 \\ &= \frac{64}{3} + \frac{48}{4} = \frac{64}{3} + \frac{36}{3} = \frac{100}{3} \end{aligned}$$

$$2) \int_2^3 \frac{2dx}{x^2 - 1}$$

Решење:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{2dx}{x^2 - 1} &= \int_2^3 \frac{x+1 - (x-1)dx}{(x-1)(x+1)} = \int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} dx - \int_2^3 \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} - \int_2^3 \frac{dx}{x+1} = \ln|x-1| \Big|_2^3 - \ln|x+1| \Big|_2^3 = \\ &= \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 = \ln 2 - 2\ln 2 + \ln 3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$4) \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2}$$

Решење:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Смена: $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt$

За $x = 0, t = 0^2 + 1 = 1$. За $x = 1, t = 1^2 + 1 = 2$

$$5) \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$$

Решење:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2 - 1)2tdt}{t} = 2 \int_2^3 \frac{t^3 - t}{t} dt = 2 \int_2^3 (t^2 - 1) dt = 2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 - 2t \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3} \right) - 2(3 - 2) = \frac{32}{3}$$

Смена:

$$\sqrt{1+x} = t \Rightarrow x = t^2 - 1$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = dt$$

$$\frac{dx}{2t} = dt \Rightarrow dx = 2tdt$$

4 Методом парцијалне интеграције решити одређене интеграле:

$$1) \int_1^e \ln x dx$$

Решење:

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$2) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

Решење:

$$u = \sin x \quad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x dx \quad v = e^x$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \sin x \cdot e^x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = - \left(\cos x \cdot e^x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \right)$$

$$P = -(-e^{\pi} - 1 + P)$$

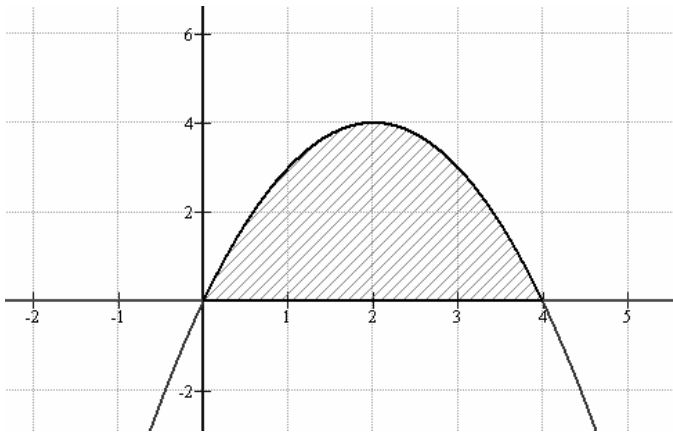
$$u = \cos x \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x dx \quad v = e^x$$

5 Израчунати површину ограничену линијама $y = 4x - x^2$ и $y = 0$.

Решење:

За овакве задатке морамо да нацртамо слику:



$$\int_0^4 (4x - x^2) dx = 4 \int_0^4 x dx - \int_0^4 x^2 dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$

6 Израчунати површину ограничену линијама $x^2 + y^2 = 16$ и $y^2 = 6x$

Решење:

Ради се о површини између круга и параболе. Да нађемо прво пресечне тачке круга и параболе:

$$x^2 + y^2 = 16$$

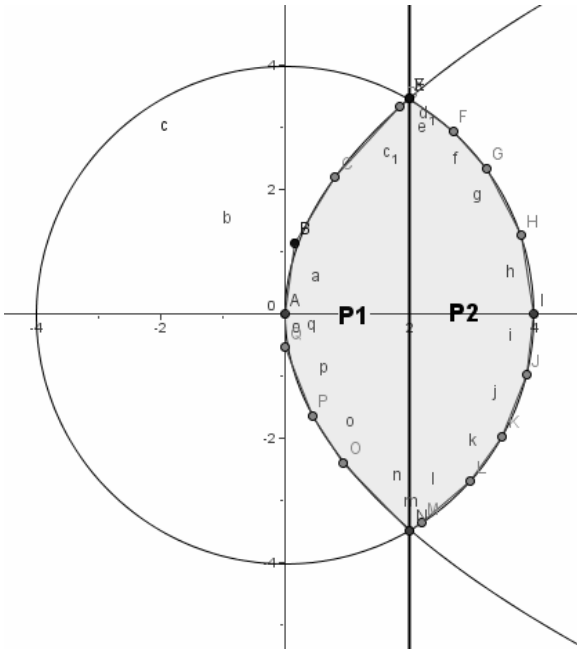
$$y^2 = 6x$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -8$$

Друго решење не долази у обзир јер не можемо наћи корен негативног броја (у овом случају). Дакле, $x = 2$.

Даље, из прве једначине $y = \sqrt{16 - x^2}$, из друге $y = \sqrt{6x}$

Слика:



Како је површина симетрична у односу на x -осу имамо да је површина фигуре једнака:

$$P = P_1 + P_2 = 2 \int_0^2 \sqrt{6x} dx + 2 \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx$$

Да нађемо прво P_1 :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 \sqrt{6x} dx &= 2\sqrt{6} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = 2\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Да нађемо P_2 (смена: $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$):

$$\begin{aligned} 2 \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \\ &= 32 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 32 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt + 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \end{aligned}$$

$$= 16t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 8 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 16 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + 8 \sin u \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} + 8 \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

За интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt$ користили смо смену: $2t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{2} du$

Дакле, коначно решење је: $P = \frac{16\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$

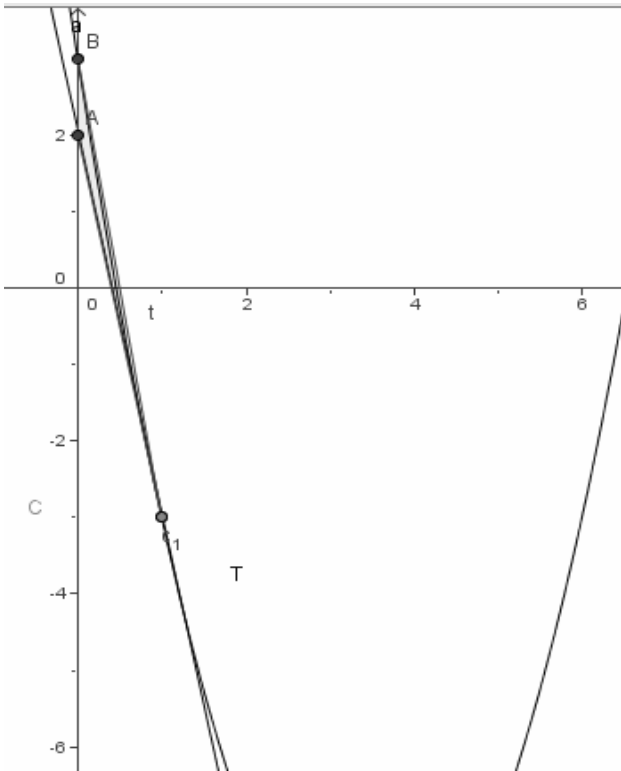
7 Израчунати површину ограничену осом Oy , параболом $y = x^2 - 7x + 3$ и тангентом ове параболе, паралелном правој $5x + y + 1 = 0$

Решење: Прво треба да нађемо ту тангенту параболе. Пошто је она паралелна са $5x + y + 1 = 0$ коефицијенти морају да им буду једнаки $y = -5x - 1$, значи $k = -5$. Дакле.

$y' = -5 \Rightarrow 2x - 7 = -5 \Rightarrow x = 1$. Додирна тачка тангенте и параболе је $T(1, -3)$. Тангента

$t: y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y + 3 = -5(x - 1) \Rightarrow y = -5x + 2$.

Сада можемо да нацртамо слику:



Површина је једнака:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 (x^2 - 7x + 3 - (-5x + 2)) dx = \int_0^1 ((x^2 - 7x + 3 + 5x - 2)) dx = \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - 2 \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + x \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

8 Израчунати површину ограничене кривом $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ и тангентама криве у тачкама $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $B(4, 2)$

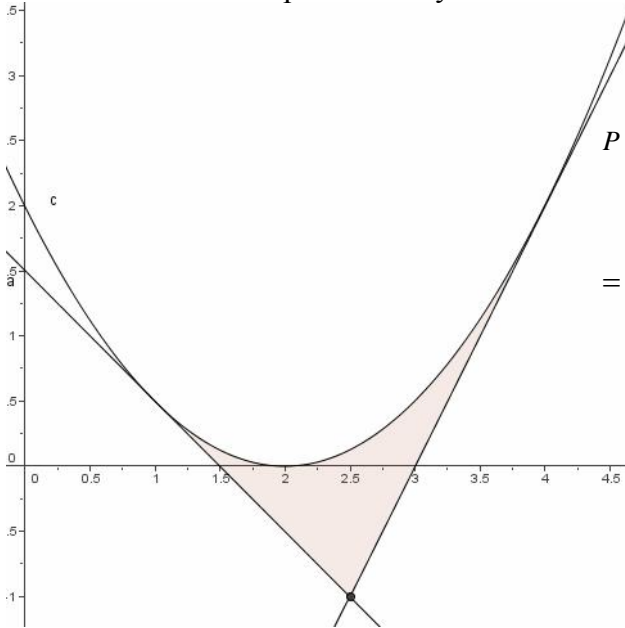
Решење:

Да нађемо прво тангенте:

$$k_1 = y'(1) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = -1. \text{ Значи да је прва тангента } y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + \frac{3}{2}$$

$$k_2 = y'(4) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = 2. \text{ Значи да је друга тангента } y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 6.$$

Сада можемо да нацртамо слику:



Површина је једнака:

$$P = \int_1^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - \left(-x + \frac{3}{2} \right) \right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - (2x - 6) \right) dx =$$

$$= \int_1^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 + x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - 2x + 6 \right) dx =$$

$$= \int_1^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot x \Big|_1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{\frac{5}{2}}^4 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{5}{2}}^4 + 8 \cdot x \Big|_{\frac{5}{2}}^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{125}{8} - \frac{1}{3} \right) - \frac{25}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} - \frac{125}{8} \right) - 2 \left(16 - \frac{25}{4} \right) + 8 \left(4 - \frac{5}{2} \right) =$$

$$= \frac{117}{48} - \frac{21}{8} + \frac{3}{4} + \frac{387}{48} - \frac{39}{2} + 12 = \frac{117 - 126 + 36 + 387 - 936 + 576}{48} = \frac{54}{48} = \frac{9}{8}$$

9 Израчунати површину ограничену параболом $y = x^2 - 5x + 6$ и нормале на тангенту $3x + y = 5$ у тачки додира са парболом.

Решење:

Прво морамо да нађемо тачку додира, онда коефицијент нормале:

Тачка додира: $-3x + 5 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Тачка додира је $A(1, 2)$.

Коефицијент нормале: $k_1 k_2 = -1 \Rightarrow (-3)k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{3}$.

Једначина нормале: $y - y_1 = k_2(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Морамо да одредимо и тачке пресека нормале и параболе:

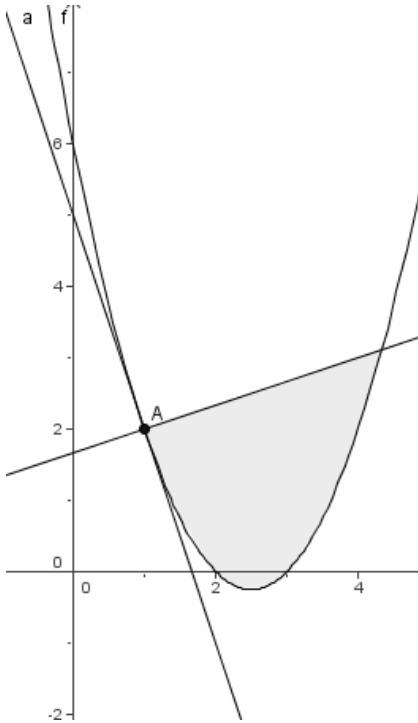
$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 18 - x - 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{13}{3}$$

Једна пресечна тачка је $(1, 2)$, а друга је $\left(\frac{13}{3}, \frac{28}{9}\right)$

Сада можемо да нацртамо слику:

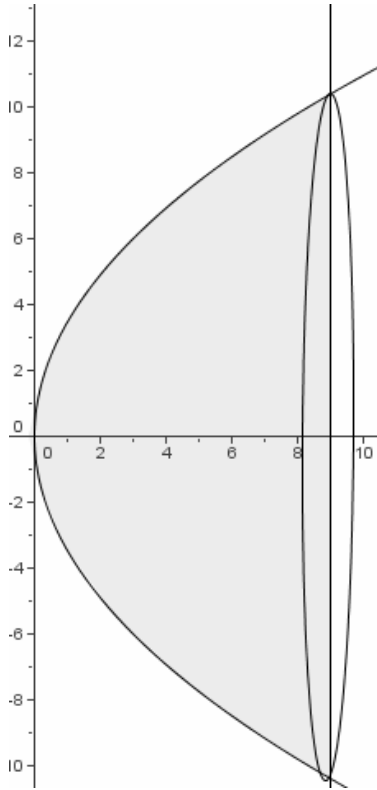


Површина је:

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{13}{3}} \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} - (x^2 - 5x + 6) \right) dx &= \int_1^{\frac{13}{3}} \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} - x^2 + 5x - 6 \right) dx = \\ &= \int_1^{\frac{13}{3}} \left(-x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{13}{3} \right) dx = \int_1^{\frac{13}{3}} \frac{1}{3} (-3x^2 + 16x - 13) dx \\ &= -\frac{x^3}{3} \Big|_1^{\frac{13}{3}} + \frac{16}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\frac{13}{3}} - 13 \cdot x \Big|_1^{\frac{13}{3}} = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2170}{27} - \frac{8}{3} \cdot \frac{160}{9} - \frac{13}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{-2170 + 3840 - 1170}{81} = \frac{500}{81} \end{aligned}$$

10. Израчунати површину омотача обртног тела које настаје ротацијом $y^2 = 12x$, $x \leq 9$ око осе Ox .

Решење:



$$y = \sqrt{12x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{12x}} \cdot 12 = \frac{6}{\sqrt{12x}}$$

$$P = 2\pi \int_0^9 \sqrt{12x} \sqrt{1 + \frac{36}{12x}} dx = 2\pi \int_0^9 \sqrt{12x} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{x}} dx = 2\pi \int_0^9 \sqrt{12x + 36} dx = 2\sqrt{12}\pi \int_0^9 \sqrt{x + 3} dx =$$

$$= 12\sqrt{12}\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} 2t^2 dt = 12\sqrt{12}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot t^3 \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} = 12\sqrt{12}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot (12\sqrt{12} - 3\sqrt{3}) = 12\sqrt{12}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 21\sqrt{3} = 168\pi$$

За интеграл $\int_0^9 \sqrt{x+3} dx$ користили смо смену $x+3 = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ итд.

11 Израчунати површину омотача обртног тела које настаје ротацијом $3y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ око осе Ox .

Решење:

$$y = \frac{x^3}{3} \quad y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$P = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \sqrt{1+x^4} dx = \frac{2}{3} \pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx = \frac{2}{3} \pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{2} dt = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{9} \pi (2\sqrt{2} - 1).$$

12 Израчунати запремину тела које настаје обртањем $y^2 = 4x$, $x \leq 1$ око осе Ox .

Решење:

$$V = \pi \int_0^1 4x dx = \pi \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 2\pi$$

13 Израчунати запремину тела које настаје обртањем $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ око осе Ox .

Решење:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \cdot x \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{4} \int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{\pi^2}{2}$$

14 Израчунати запремину тела које настаје обртањем око осе Ox равне површи ограничене Кривим $y^2 = x$ и $y = x^2$.

Решење: $y^2 = x$ и $y^2 = x^4$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

15

Изрaчунати запремину тела које настаје обртањем око осе Ox равне површи ограничене кругом $x^2 + y^2 = 25$ и његовим тангентама из тачке $A\left(\frac{25}{3}, 0\right)$.

Решење:

Да нађемо прво тангенте: Из услова додира праве и круга $r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$ где је $r = \sqrt{25} = 5$, $p = q = 0$. Тангенте требају да пролазе кроз тачку А, дакле једначина праве има облик $y = k\left(x - \frac{25}{3}\right)$.

$y = kx - \frac{25k}{3}$. Одавде имамо $n = -\frac{25k}{3}$. Сада можемо да решимо једначину:

$25k^2 + 25 = \frac{625}{9}k^2 \Rightarrow 225k^2 + 225 = 625k^2 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{4}$. Једначине тангенти су $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ и

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Површину фигуре ћемо добити ако од купе полупречника $r = 4$ и висине $H = \frac{25}{3} - \frac{9}{3} = \frac{16}{3}$ одузмемо запремину фигуре коју прави лук кружнице од тачке А до тачке С.

Запремина купе је $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \frac{16}{3} \pi = \frac{256}{9} \pi$.

Запремина те фигуре коју прави лук кружнице је: $V = \pi \int_3^5 (25 - x^2) dx = \pi 25x \Big|_3^5 - \pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_3^5 =$
 $= 25\pi(5 - 3) - \frac{\pi}{3}(125 - 27) = 50\pi - \frac{98\pi}{3} = \frac{150\pi - 98\pi}{3} = \frac{52\pi}{3}$.

Коначна, тражена запремина износи $V = \frac{256\pi}{9} - \frac{52\pi}{3} = \frac{256\pi - 156\pi}{9} = \frac{100\pi}{9}$.

Слика:

